

## 20. DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

Una matriz cuadrada  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  se dice que es **ortogonalmente diagonalizable** si y sólo si es diagonalizable mediante una matriz de diagonalización que sea ortogonal, es decir si existe una matriz  $P$  ortogonal ( $P^{-1}P = I_n$ ) y una matriz diagonal  $D$  tales que  $D = P^{-1}AP = P^tAP$ .

Dado que las columnas de toda matriz de diagonalización están formadas por una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores, se deduce lo siguiente:

La matriz cuadrada  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si se puede encontrar una base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores ortonormales de  $A$  (que compondrán las columnas de la matriz  $P$  de diagonalización).

### 20.1. PROPIEDAD DE LAS MATRICES ORTOGONALMENTE DIAGONALIZABLES

Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es ortogonalmente diagonalizable entonces es simétrica.

#### Demostración

Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es ortogonalmente diagonalizable existe una matriz ortogonal  $P$  y una matriz diagonal  $D$  tales que  $D = P^{-1}AP \Rightarrow A = PDP^{-1} \xrightarrow{P^{-1}=P^t} A = PDP^t$  y

$$A^t = (PDP^t)^t = (P^t)^t D^t P^t = PDP^t = A$$

por tanto  $A$  es simétrica.

### 20.2. PROPIEDADES DE LAS MATRICES REALES SIMÉTRICAS

#### 20.2.1. AUTOVALORES DE UNA MATRIZ REAL SIMÉTRICA

Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es una matriz de componentes reales y simétrica entonces todos sus autovalores son reales.

#### Demostración

Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  una matriz de componentes reales y simétrica y sea  $\lambda$  tal que  $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$  para algún vector  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , entonces notando por  $\bar{\mathbf{u}}$  el conjugado de  $\mathbf{u}$ , se tiene que:

$$\bar{\mathbf{u}}^t A\mathbf{u} = (\bar{\mathbf{u}}^t A\mathbf{u})^t = \mathbf{u}^t A^t \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^t A \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^t \overline{A\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}^t A\mathbf{u}}$$

Luego  $\bar{\mathbf{u}}^t A\mathbf{u}$  coincide con su conjugado y por tanto se trata de un número real. Por otra parte

$$A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} \Rightarrow \bar{\mathbf{u}}^t A\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}^t \lambda\mathbf{u} = \lambda \bar{\mathbf{u}}^t \mathbf{u}$$

Dado que  $\bar{\mathbf{u}}^t A \mathbf{u} \in \mathbb{R}$  y por el mismo argumento  $\bar{\mathbf{u}}^t \mathbf{u} \in \mathbb{R}$ , se deduce que  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

### 20.2.2. AUTOVECTORES DE UNA MATRIZ SIMÉTRICA

Si  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es simétrica entonces los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales.

#### Demostración

Sean  $\mathbf{u}$  y  $\mathbf{v}$  autovectores asociados respectivamente a los autovalores  $\lambda$  y  $\mu$ , con  $\lambda \neq \mu$ .

Se trata de demostrar que son ortogonales, es decir que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$

$$\lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \lambda \mathbf{u}^t \mathbf{v} = (\lambda \mathbf{u})^t \mathbf{v} = (A \mathbf{u})^t \mathbf{v} = \mathbf{u}^t A^t \mathbf{v} = \mathbf{u}^t (A \mathbf{v}) = \mathbf{u}^t \mu \mathbf{v} = \mu \mathbf{u}^t \mathbf{v} = \mu \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$$

Por tanto se tiene que:

$$(\lambda - \mu) \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$$

Dado que  $(\lambda - \mu) \neq 0$ , debe ser  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ , con lo que se tiene el resultado.

### 20.3. CARACTERIZACIÓN DE LAS MATRICES ORTOGONALMENTE DIAGONALIZABLES

Se verifica que la matriz de componentes reales  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$  es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si es simétrica.

#### 20.3.1. PROCEDIMIENTO DE DIAGONALIZACIÓN ORTOGONAL

Sea  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ . Para realizar una diagonalización ortogonal de  $A$ , se siguen los siguientes pasos:

1. Comprobar que la matriz  $A$  es simétrica. Si  $A$  no es simétrica, no es ortogonalmente diagonalizable y el proceso termina.
2. Calcular el polinomio característico y los autovalores de  $A$ , considerando su multiplicidad.
3. Para cada autovalor  $\lambda$  con multiplicidad  $m(\lambda)$  considerar  $m(\lambda)$  autovectores ortonormales asociados.
4. Componer la matriz ortogonal  $P$  cuyas columnas son los autovectores considerados
5. Componer la matriz diagonal  $D$  cuya diagonal principal contiene los autovalores en el mismo orden en que se han colocado los autovectores en  $P$ .
6. En estas condiciones se verifica que  $D = P^{-1}AP$  es una diagonalización ortogonal de  $A$ .

#### EJEMPLO 11

Diagonalizar las siguientes matrices, si es posible hacerlo ortogonalmente,

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

### Solución

La matriz  $A_1$  no es simétrica, por tanto la caracterización 20.3 asegura que no es una matriz ortogonalmente diagonalizable, no obstante puede ser diagonalizable. Se calcula el polinomio característico de  $A_1$ :

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2(-1-\lambda)$$

Sus autovalores son  $\lambda_1 = 1$  raíz doble y  $\lambda_2 = -1$ .

Se calculan los autovectores asociados a  $\lambda_1 = 1$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow[y=\alpha]{z=\beta} \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se seleccionan los autovectores  $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  (no es necesario que sean ortonormales, pues no se está haciendo una diagonalización ortogonal)

Se calculan los autovectores asociados a  $\lambda_2 = -1$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xRightarrow{z=\alpha} \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se selecciona el autovector  $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Sean  $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , se tiene que  $D = P^{-1}A_1P$  es una diagonalización de  $A_1$ ,

pero no es una diagonalización ortogonal, pues la matriz  $P$  no es ortogonal. Observar que si se eligen

vectores ortonormales asociados a cada autovalor:  $\mathbf{p}'_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{p}'_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ , se

obtiene una nueva diagonalización de  $A_1$  pero tampoco es una diagonalización ortogonal, pues

la matriz  $P' = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  no es una matriz ortogonal:

$$P'^t P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz  $A_2$  es simétrica, por tanto la caracterización 20.3 asegura que es una matriz ortogonalmente diagonalizable. Se calcula el polinomio característico de  $A_2$ :

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-1) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

Sus autovalores son  $\lambda_1 = 1$  raíz doble y  $\lambda_2 = -1$ .

Se calculan los autovectores asociados a  $\lambda_1 = 1$ :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{y=\alpha, z=\beta} \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Se seleccionan los autovectores  $\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , en este caso se está realizando

una diagonalización ortogonal por lo que se consideran dos vectores ortonormales.

Se calculan los autovectores asociados a  $\lambda_2 = -1$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xRightarrow{y=\alpha} \begin{cases} x = -\alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se selecciona el autovector  $\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Sean  $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , se tiene que  $D = P^{-1}A_2P$  es una

diagonalización ortogonal de  $A_2$ , pues la matriz  $P$  es ortogonal.